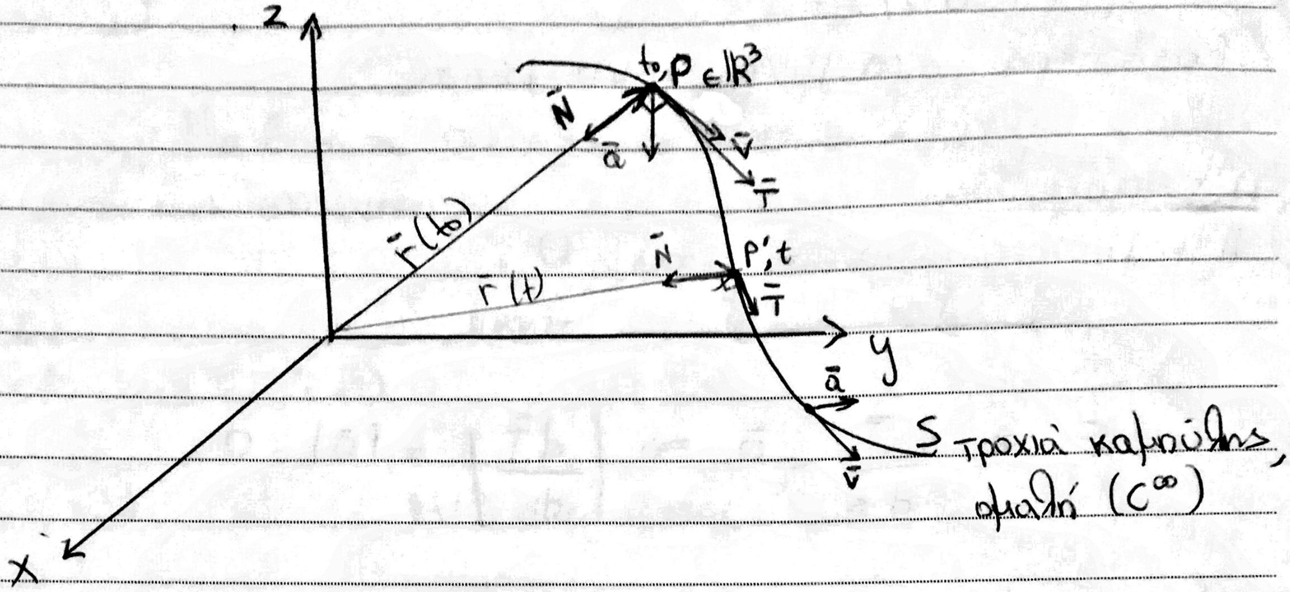
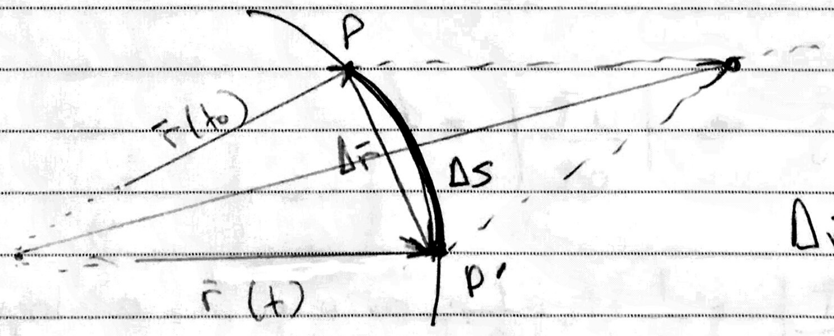
28/02/2019

Μάθημα 3ο



Παράμετρος μήκους τόξου:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\bar v|\, dt' = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot x)^2 + (\dot y)^2 + (\dot z)^2}\, dt'$$



$$\Delta \bar r = \bar r(t) - \bar r(t_0)$$

$$|\bar v| = \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\bar r}{dt}\right| , \quad \bar v = \frac{d\bar r}{dt}$$

$$\bar T = \frac{\bar v}{|\bar v|} = \frac{d\bar r}{ds}$$

, μοναδιαίο ίδιας κατεύθυνσης και φοράς με το διάνυσμα ταχύτητας

Καμπυλότητα: $k = \frac{1}{|\bar{v}|}\left|\frac{d\bar{T}}{d}\right| = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$ βαθμωτό μέγεθος

$\bar{N} = \frac{1}{|\bar{v}|} \cdot \frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{d\bar{T}}{ds}$ διανυσματικό μέγεθος

Ορισμός: Ορίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στην καμπύλη με $k \neq 0$, : $\bar{N} = \frac{1}{k}\frac{d\bar{T}}{ds}$, $k = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|$

Τα διανύσματα $\bar{N}, \bar{T}$ είναι κάθετα $\Rightarrow$
$\bar{N} \cdot \bar{T} = 0$
Επίσης είναι και μοναδιαία.

Παράδειγμα: Βρείτε τα $\bar{T}$ και $\bar{N}$ για την κίνηση :
$\bar{r} = \cos(2t)\bar{i} + \sin(2t)\bar{j}$

Απάντηση: Θέτω $x = \cos(2t)$ και $y = \sin(2t)$
Μετασχηματισμός σε πολικές:
$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ Η κίνηση είναι κυκλική και μάλιστα έχουμε μοναδιαίο κύκλο, διότι:
$x^2 + y^2 = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1 \ (= r^2)$
Άρα κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r.

Το $2t$ είναι η γωνία με την οποία κινείται το υλικό σημείο και μάλιστα εξαρτάται από τον χρόνο.
Διαγράφει διπλάσια γωνία άρα κινείται γρηγορότερα.

Ταχύτητα: $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -2\sin(2t)\bar{i} + 2\cos(2t)\bar{j}$

$|\bar{v}| = 2$.

Θέλω το εφαπτόμενο T : $\bar{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -\sin(2t)\bar{i} + \cos(2t)\bar{j}$

$$\bar{N} = \frac{1}{k}\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right|}\cdot\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{|\bar{v}|}{\left|\frac{d\bar{T}}{dt}\right|}\cdot\frac{\frac{d\bar{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Έχω μια διανυσματική συνάρτηση : $\bar{T}(s(t)) \to \bar{T}(t)$

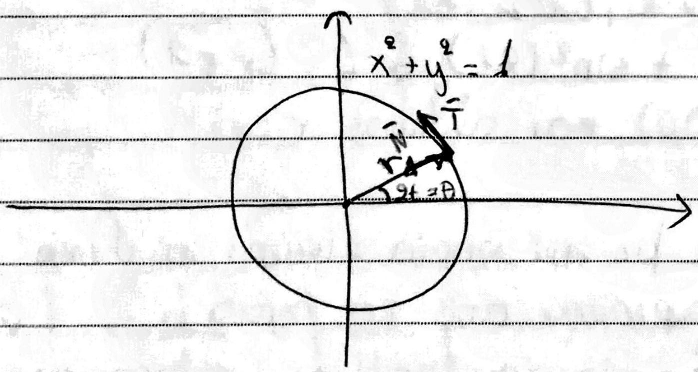
$$\frac{d\bar{T}}{ds(t)} = \frac{d\bar{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\bar{T}/dt}{ds/dt}$$

Άρα: $$\bar{N} = \frac{d\bar{T}/dt}{|d\bar{T}/dt|}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{T}}{dt} = -2\cos(2t)\bar{i} - 2\sin(2t)\bar{j}}, \quad \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right| = 2.$$

Άρα: $$\boxed{\bar{N} = -\cos(2t)\bar{i} - \sin(2t)\bar{j}}$$

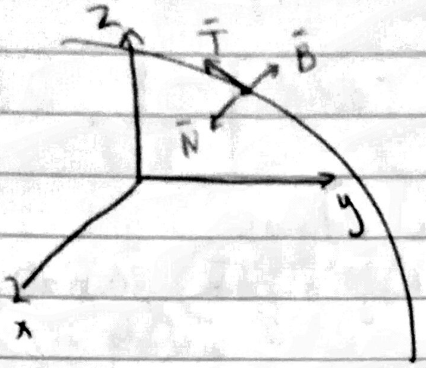
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad |\bar{v}| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| \text{ ή } \frac{ds}{dt}$$



$\bar{T}$: $x<0$, $y>0$

$\bar{N}$: $x<0$, $y<0$

➡ $\bar{B} = \bar{N} \times \bar{T}$, τότε τα διανύσματα $\bar{B}, \bar{N}, \bar{T}$ ορίζουν ένα τοπικό, κινούμενο, δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων (φυσικό σύστημα αναφοράς)



Ιδιότητες:

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\bar{N} \times \bar{T}) = \frac{d\bar{T}}{ds} \times \bar{N} + \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$$

όμως. $\frac{d\bar{T}}{ds} \parallel \bar{N}$ τότε: $\frac{d\bar{T}}{ds} \times \bar{N} = \bar{0}$

όμως $\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$

όμως κάθετο στα $\bar{T}$ και $\frac{d\bar{N}}{ds}$

άρα και στο $\bar{B}$. Άρα και το. $\boxed{\frac{d\bar{B}}{ds} \parallel \bar{N}}$

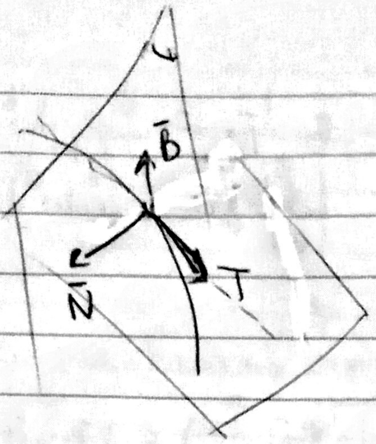
Άρα: $\boxed{\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau \bar{N}}$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau \bar{N} \Rightarrow \boxed{\tau = -\frac{d\bar{B}}{ds} \cdot \bar{N}}$$ στρέψη

πόσες φορές είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο το $d\bar{B}/ds$ από το $\bar{N}$ βαθμωτή ποσότητα το τ. Άρα θέλω εσωτερικό γινόμ. Το «-» είναι για σύμβαση

Παρατηρήσεις:

1) Η καμπυλότητα παίρνει πάντα θετικές τιμές: $\kappa > 0$
2) Η στρέψη παίρνει όλες τις τιμές: $\tau \in \mathbb{R}$.
3) Η καμπυλότητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο στρέφεται το κάθετο εφαπτόμενο επίπεδο καθώς το Υ.Σ κινείται πάνω στην τροχιά.
4) Η στρέψη είναι ο ρυθμός μεταβολής με τον οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο στρέφεται ως προς τον άξονα του $\bar{T}$



Η στρέψη μετρά πόσο περιελίσσεται η καμπύλη.

Παράδειγμα: Να βρείτε τα κ, τ της έλικας

$\bar r(t) = (a\cos t)\bar i + (a\sin t)\bar j + bt\bar k$, $a,b \geq 0$, $a^2+b^2 \neq 0$

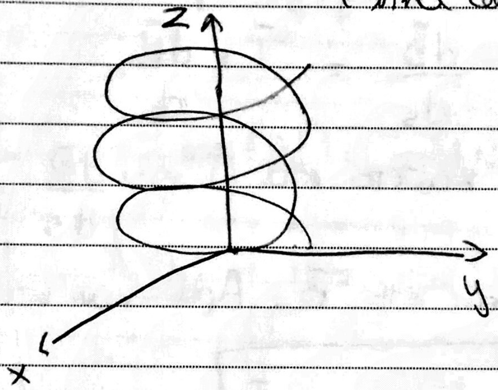
έλικα του Αρχιμήδη.

↑ κύκλος

βάση του b ανεβαίνεις

έχεις μία γραμμική κίνηση.

Λύση



παραμετρικοποιημένη ως προς μία παράμετρο t

- $\bar v = (-a\sin t)\bar i + (a\cos t)\bar j + b\bar k$

  $|\bar v| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

- $\bar T = \dfrac{\bar v}{|\bar v|} = \dfrac{(-a\sin t)\bar i + (a\cos t)\bar j + b\bar k}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\bar i + \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\bar j + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\bar k$

- $\bar N = \dfrac{d\bar T/dt}{|d\bar T/dt|} = \left(\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\bar i - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\bar j + 0\cdot\bar k\right) \Big/ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} =$

  $= -\cos t\,\bar i - \sin t\,\bar j + 0\bar k$ Διδιάστατο → στο Oxy επίπεδο.

- $\kappa = \dfrac{1}{|\bar v|}\left|\dfrac{d\bar T}{dt}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

- $\bar B = \bar T \times \bar N$

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \dots \Rightarrow$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[b\sin t\, \bar{i} - b\cos t\, \bar{j} + \bar{k} \right]$$

Άρα: $\dfrac{d\bar{B}}{ds} = \dfrac{d\bar{B}/dt}{ds/dt} = \dfrac{1}{|\bar{v}|} \dfrac{d\bar{B}}{dt} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \left[b\cos t\, \bar{i} + b\sin t\, \bar{j} \right]$

και: $\tau = -\dfrac{d\bar{B}}{ds} \cdot \bar{N} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ Άρα δεξιόστροφη (προς τα θετικά)